Probabilité Et Statistiques - Convergence Des Variables Aléatoires

Aubin SIONVILLE

Télécom St Etienne 2023-2024

Convergence presque sûre

Définition

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles.

$$\boxed{X_n \underset{n\to+\infty}{\xrightarrow{\text{p.s.}}} X \iff \mathbb{P}\left(\left\{\omega \in \Omega, \lim_{n\to+\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\right\}\right) = 1}$$

Corollaire

$$\boxed{X_n \underset{n\to+\infty}{\xrightarrow{\text{p.s.}}} X \iff \forall\varepsilon > 0, \mathbb{P}\left(\lim_{n\to+\infty} |X_n - X| \geq \varepsilon\right) = 0}$$

Propriétés

Linéarité

$$\boxed{\begin{cases} X_n \underset{n\to+\infty}{\xrightarrow{\text{p.s.}}} X \\ Y_n \underset{n\to+\infty}{\xrightarrow{\text{p.s.}}} Y \end{cases} \implies \alpha X_n + \beta Y_n \underset{n\to+\infty}{\xrightarrow{\text{p.s.}}} \alpha X + \beta Y}$$

Utilisation avec des fonctions continues

$$\boxed{\begin{cases} X_n \underset{n\to+\infty}{\xrightarrow{\text{p.s.}}} X \\ f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \end{cases} \implies f(X_n) \underset{n\to+\infty}{\xrightarrow{\text{p.s.}}} f(X)}$$

Convergence dans L^p

Définition

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles.

$$\boxed{X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathrm{L}^p} X \iff \mathbb{E}\left[|X_n - X|^p\right] \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$$

Propriétés

Linéarité

$$\boxed{\begin{cases} X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathrm{L}^p} X \\ Y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathrm{L}^p} Y \end{cases} \implies \alpha X_n + \beta Y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathrm{L}^p} \alpha X + \beta Y}$$

Normalisation de l'espace

$$\boxed{\text{L^p est complet pour $p \geq 1$ pour la norme $||.||_p$}}$$

Convergence en espace plus petit

$$\boxed{(p \leq q) \implies \left(X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathrm{L}^q} X \implies X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathrm{L}^p} X\right)}$$

Convergence de l'espérance

$$\boxed{\left(X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathrm{L}^1} X\right) \implies \left(\mathbb{E}\left[X_n\right] \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbb{E}\left[X\right]\right)}$$

Convergence en probabilité

Définition

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles.

$$\boxed{X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} X \iff \forall\varepsilon>0, \mathbb{P}\left(\{\omega\in\Omega, |X_n-X|>\varepsilon\}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$$

Propriétés

Linéarité

$$\boxed{\begin{cases} X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} X \\ Y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} Y \end{cases} \implies \alpha X_n + \beta Y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} \alpha X + \beta Y}$$

Réciproques partielles

$$\boxed{X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} X \implies \begin{array}{c}\text{Il existe une sous-suite } (X_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}} \\ \text{telle que } X_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s.}} X\end{array}}$$

Utilisation avec des fonctions continues

$$\boxed{\begin{cases} X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} X \\ f\in\mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \end{cases} \implies f(X_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} f(X)}$$

Convergence dans L^p par borne uniforme

$$\boxed{\begin{cases} X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} X \\ \exists Y\in\mathrm{L}^p, \forall n\in\mathbb{N}, |X_n|\le Y \end{cases} \implies \begin{cases} X\in\mathrm{L}^p \\ X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathrm{L}^p} X \end{cases}}$$

Convergence en loi

Définition

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles.

$$\boxed{X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} X \iff \lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}[f(X_n)] = \mathbb{E}[f(X)] \text{ pour toute fonction continue bornée } f}$$

Propriétés

Linéarité

$$\boxed{\begin{cases} X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} X \\ Y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} Y \end{cases} \implies \alpha X_n + \beta Y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \alpha X + \beta Y}$$

Utilisation avec des fonctions continues

$$\boxed{\begin{cases} X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} X \\ f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \end{cases} \implies f(X_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} f(X)}$$

Lemme de Slutsky

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de variables aléatoires réelles.

$$\boxed{\begin{cases} X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} X \\ Y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \lambda \end{cases} \implies \begin{cases} X_n + Y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} X + \lambda \\ X_n Y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \lambda X \end{cases}}$$

Convergence en loi et fonction de répartition

$$\boxed{X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} X \implies \begin{array}{l} \text{Pour tout } x \text{ telle que } F_X(x) = F_X(x^-), \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(F_{X_n}(x) = F_X(x)) \end{array}}$$

Convergence en loi et fonction caractéristique

Remarque : Valable avec des vecteurs aléatoires de $\mathbb{R}^d$

Premier théorème de Levy

$$\boxed{X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} X \iff \forall t \in \mathbb{R}, \varphi_{X_n}(t) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \varphi_X(t)}$$

Théorème

$$\boxed{\begin{cases} \varphi_{X_n}(t) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \varphi(t) \\ \varphi \text{ est continue en } 0 \end{cases} \implies \begin{array}{l} \exists X \text{ tq } \varphi_X = \varphi \\ \text{et alors } X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} X \end{array}}$$

Relations entre les différents types de convergence

$$
\begin{tikzcd}
X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s.}} X \arrow[dr] \arrow[ddr, bend right] & & X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathrm{L}^p} X \arrow[dl] \arrow[ddl, bend left] \\
& X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} X \arrow[d] & \\
& X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} X &
\end{tikzcd}
$$